

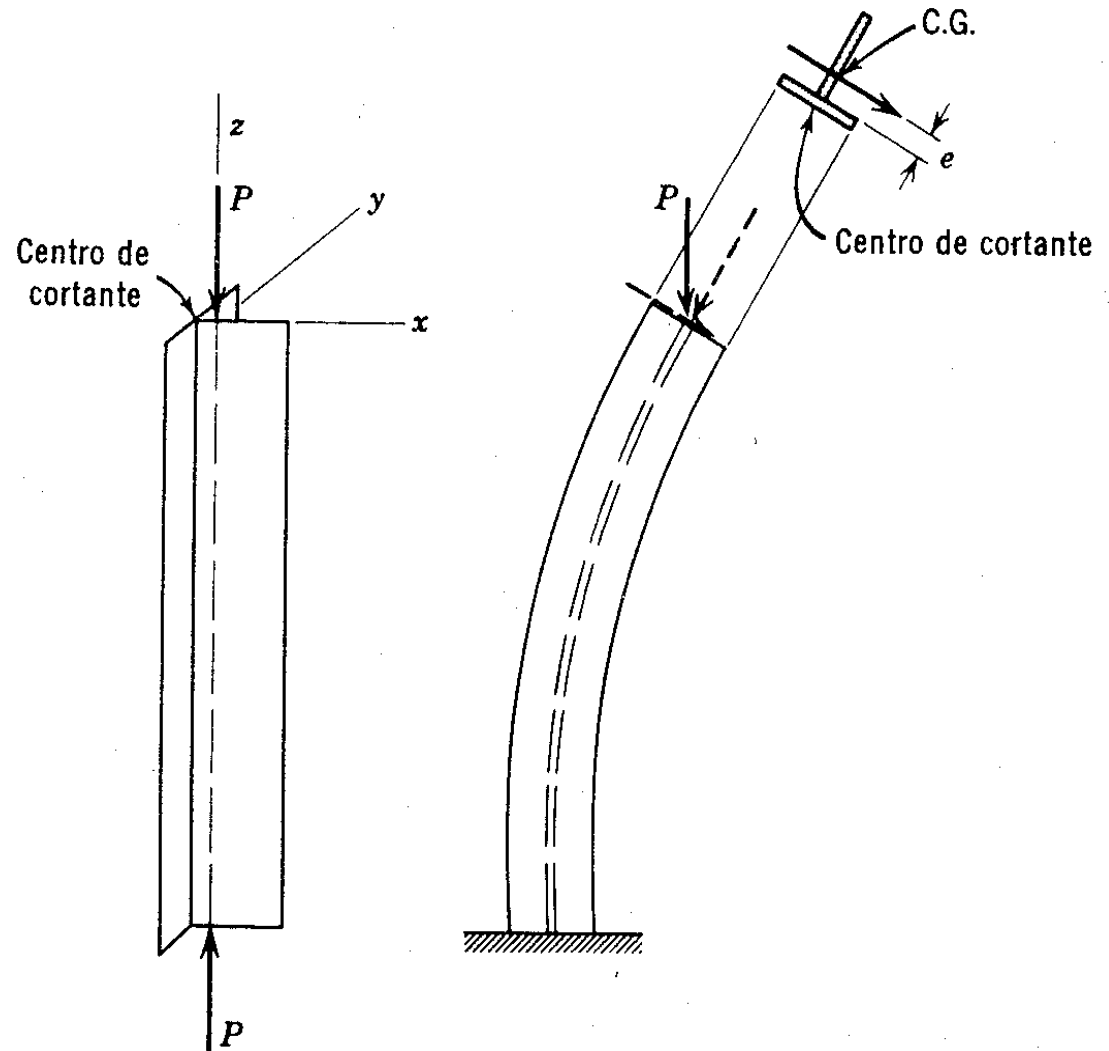
PANDEO TORSIONAL

PANDEO FLEXO-TORSIONAL

Pandeo torsional y flexotorsional

Parámetros que intervienen en la capacidad de la barra

- **Material E, G**
- **Condiciones de vinculación**
- **Longitud de la pieza - $k.L$**
- **Inercia flexional: I_x I_y**
- **Módulo de torsión J**
- **Módulo de alabeo C_w**
- **Ubicación del C.C.**



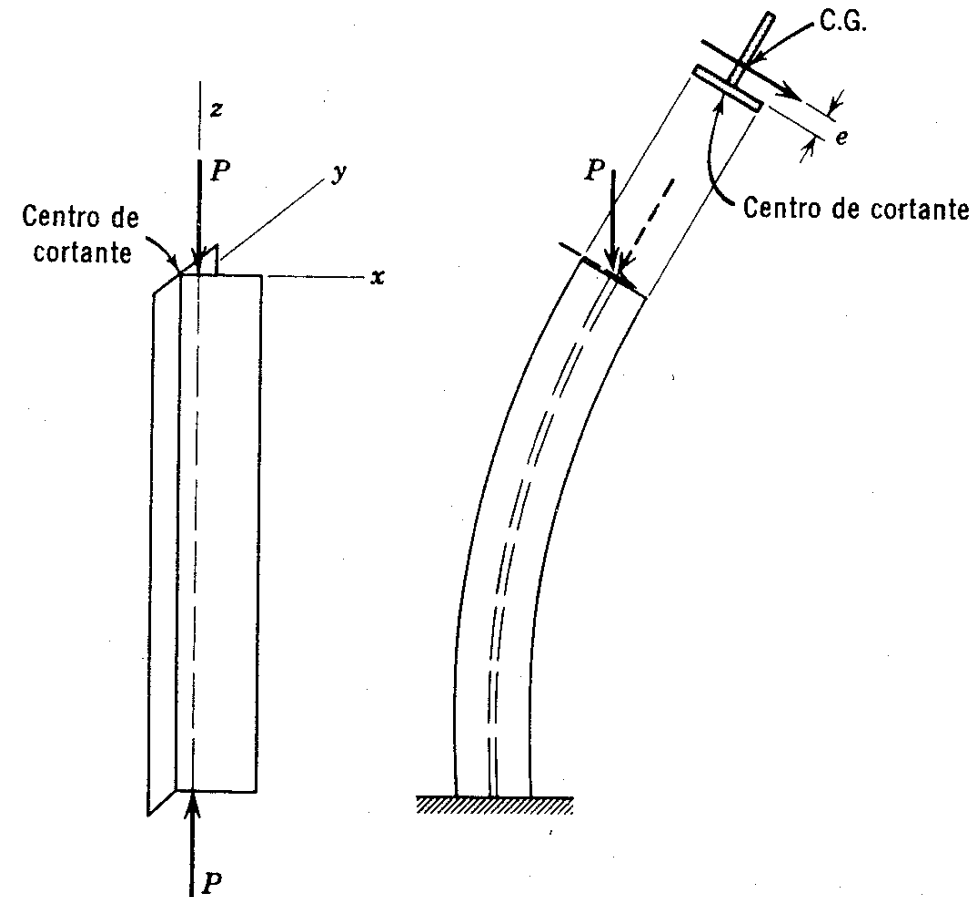
Pandeo torsional

La magnitud de la carga crítica **P_{crz}** para pandeo torsional puro, considerando la *torsión restringida* puede determinarse de la misma manera que Euler determinó la carga crítica para pandeo flexional

$$P_{crz} = \frac{1}{r_z^2} \left(G \cdot J + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{L^2} \right)$$

$$P_{crz} = \frac{G \cdot J}{r_z^2} \left(1 + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{L^2 \cdot G \cdot J} \right)$$

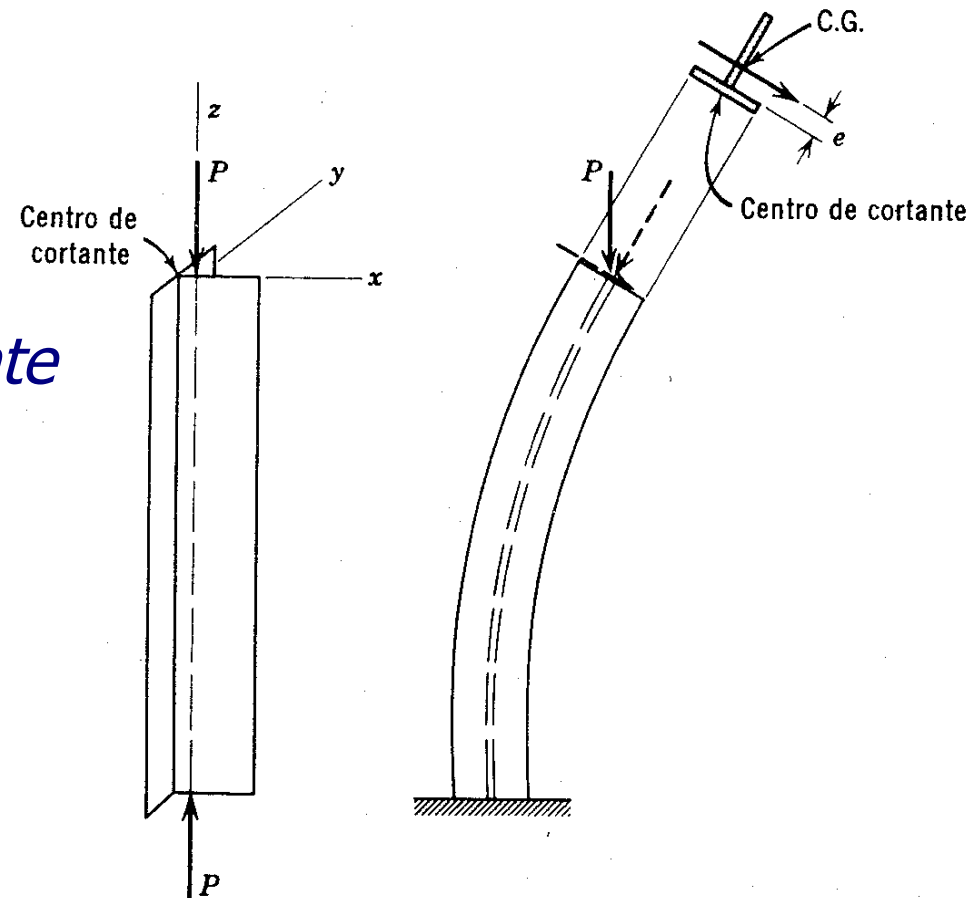
$$F_{crz} = \frac{P_{crz}}{A_g} = \frac{G \cdot J}{r_z^2 \cdot A_g} \left(1 + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{L^2 \cdot G \cdot J} \right)$$



Pandeo torsional y flexotorsional

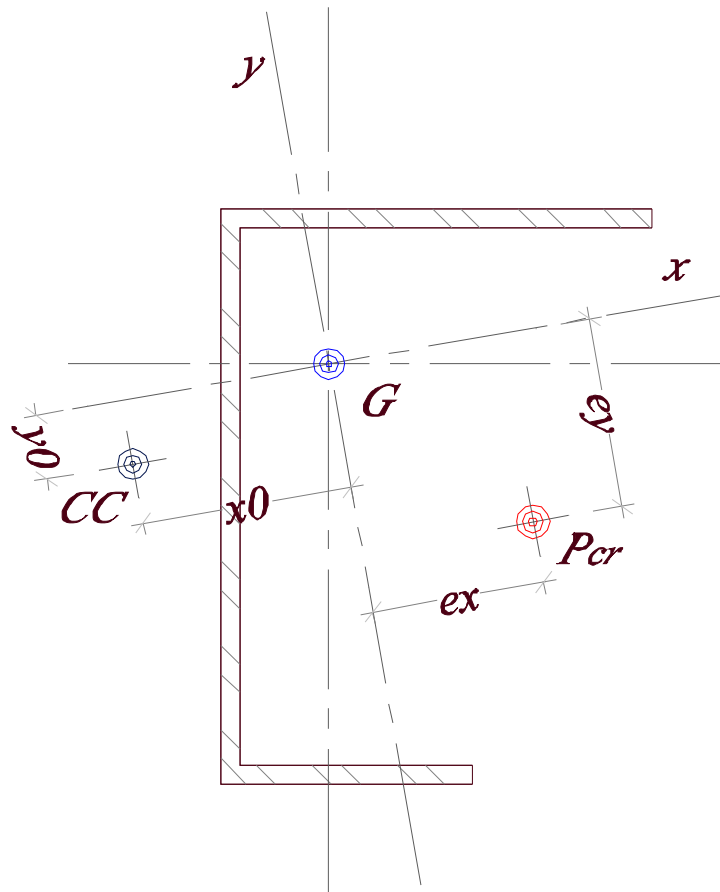
El modo de pandeo (por flexión pura, por torsión pura o por flexotorsión) depende de:

- ◆ *Simetría de la sección*
- ◆ *Localización del Centro de Cortante*
- ◆ *Excentricidad de la carga*



Pandeo torsional y flexotorsional

En el caso más general, la carga crítica P_{cr} de una pieza articulada y solicitada por una carga de compresión excéntrica, está dada por la menor de las raíces de la ecuación:



$$(P_{cr} - P_{crx}) \cdot (P_{cr} - P_{cry}) \cdot (\alpha P_{cr} - P_{crz}) - P_{cr}^2 \left[\beta_y (P_{cr} - P_{crx}) + \beta_x (P_{cr} - P_{cry}) \right] = 0$$

Pandeo torsional y flexotorsional

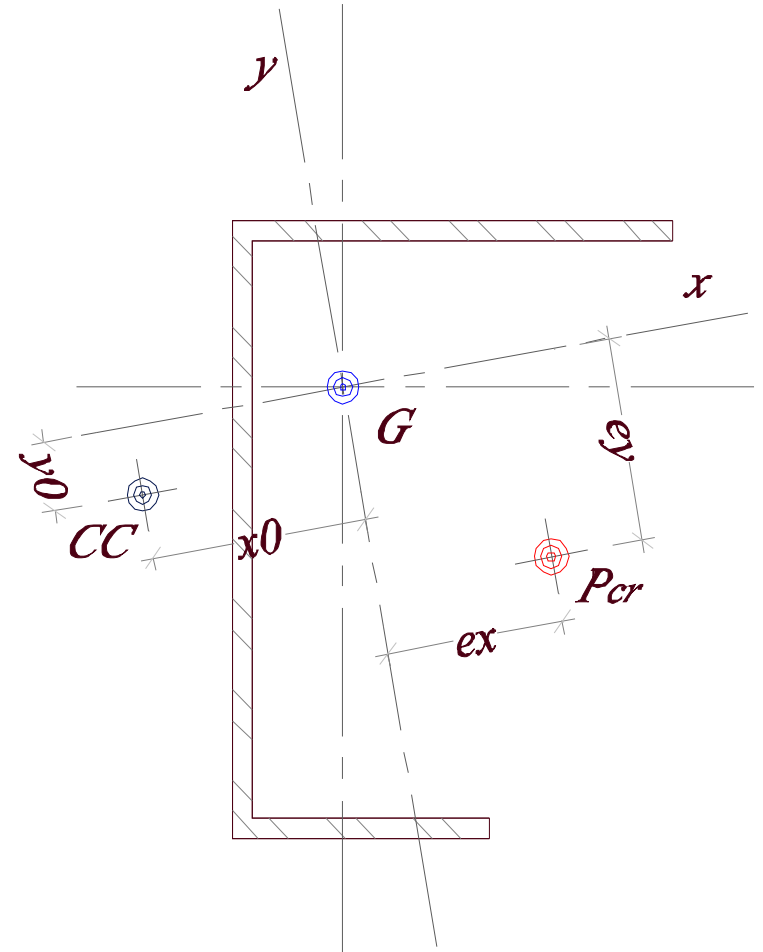
$$\left(P_{cr} - P_{crx}\right) \cdot \left(P_{cr} - P_{cry}\right) \cdot \left(\alpha P_{cr} - P_{crz}\right) - P_{cr}^2 \left[\beta_y \left(P_{cr} - P_{crx}\right) + \beta_x \left(P_{cr} - P_{cry}\right) \right] = 0$$

Para:

$$\alpha = 1 - \frac{e_x x_c - e_y y_c}{r_z^2 + x_0^2 + y_0^2} = 1 - \frac{e_x x_c - e_y y_c}{\bar{r}_0^2}$$

$$\beta_x = \frac{(x_0 - e_x)^2}{r_z^2 + x_0^2 + y_0^2} = \frac{(x_0 - e_x)^2}{\bar{r}_0^2}$$

$$\beta_y = \frac{(y_0 - e_y)^2}{r_z^2 + x_0^2 + y_0^2} = \frac{(y_0 - e_y)^2}{\bar{r}_0^2}$$



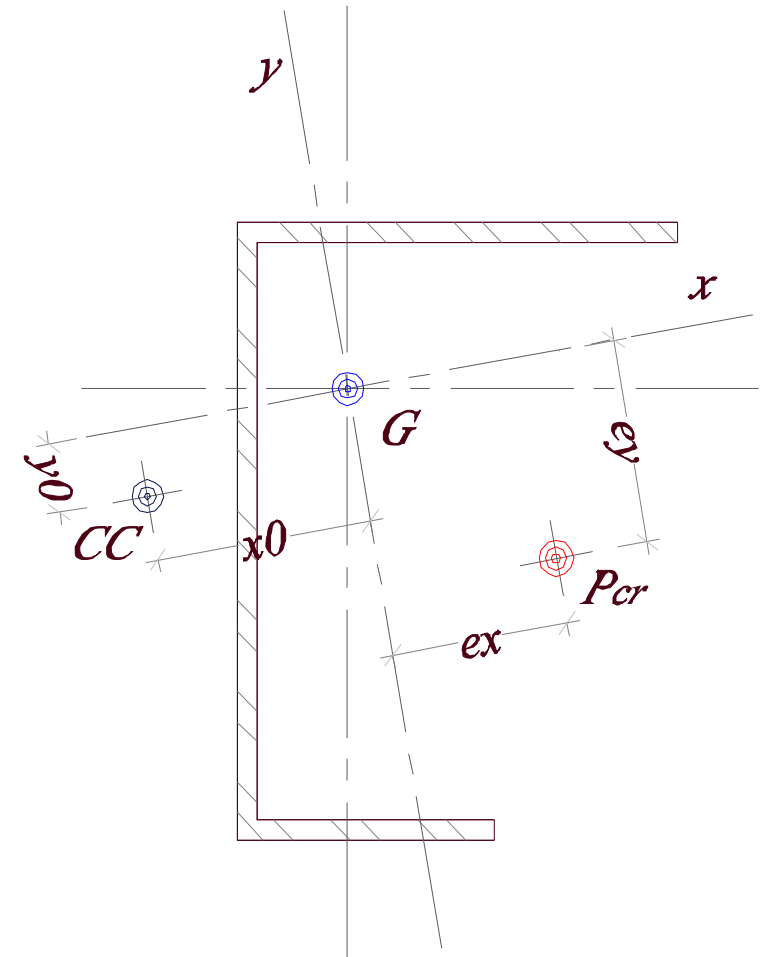
Pandeo torsional y flexotorsional

y

$$x_c = 2 x_0 - \int_A \frac{x(x^2 + y^2) dA}{I_y}$$

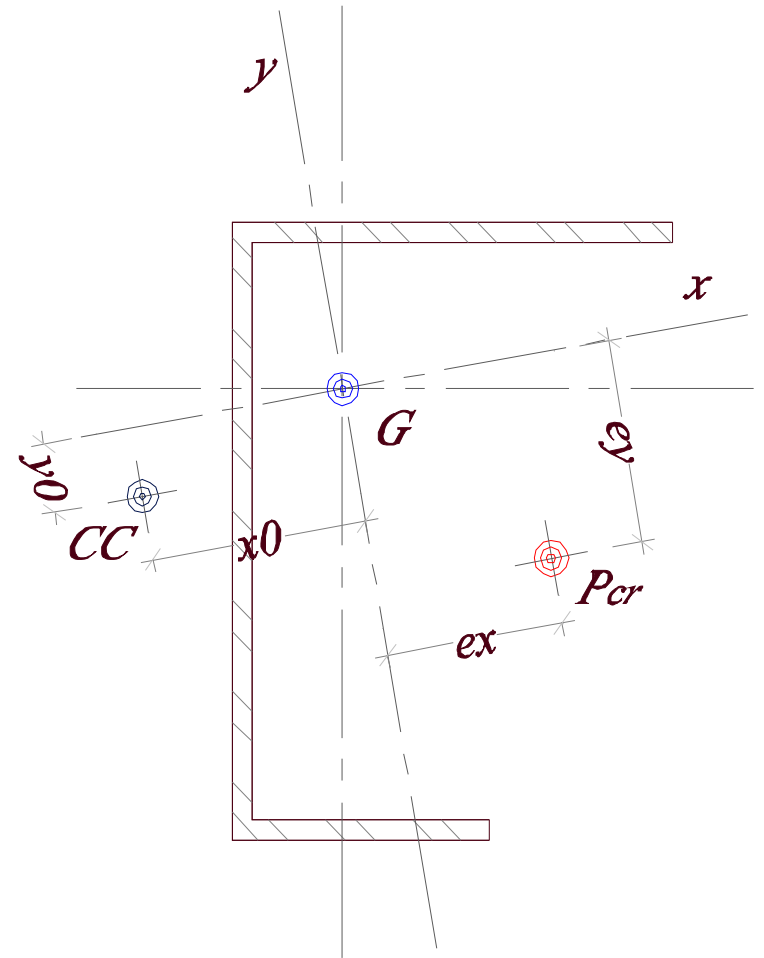
$$y_c = 2 y_0 - \int_A \frac{y(x^2 + y^2) dA}{I_x}$$

*Coordenadas de un punto
característico de la forma de
la sección transversal.*



Pandeo torsional y flexotorsional

TABLA 3.2 Propiedades de secciones para el pandeo lateral-torsional		
	$J = (2Be^3 + dt^3)/3$ $C_w = \frac{d^2}{4} I_y = \frac{ed^2 B^3}{24}$	Si $t = e$ $J = t^3 (2B + d)/3$
	$y_o = \frac{h B_1^3}{B_1^3 + B_2^3}$ $J = [(B_1 + B_2)e^3 + dt^3]/3$ $C_w = \frac{ed^2 B_1^3 B_2^3}{12 (B_1^3 + B_2^3)}$	Si $t = e$ $J = t^3 (B_1 + B_2 + d)/3$
	$x_o = 3B^2e/(6Be + dt)$ $J = (2Be^3 + dt^3)/3$ $C_w = \frac{d^2 B^3 e}{12} \frac{(3eB + 2td)}{(6eB + td)}$	Si $t = e$ $x_o = 3B^2/(6B + d)$ $J = t^3 (2B + d)/3$ $C_w = \frac{d^2 B^3 t}{12} \frac{(3B + 2d)}{(6B + d)}$
	$J = (dt^3 + Be^3)/3$ $C_w = \frac{(dt)^3 + (Be)^3}{36}$	Si $t = e$ $J = t^3 (d + B)/3$ $C_w = \frac{t^3}{36} (d^3 + B^3)$
	$J = (dt^3 + Be^3)/3$ $C_w = \frac{(Be)^3 + (dt)^3}{144} \frac{1}{36}$	Si $t = e$ $J = t^3 (d + B)/3$ $C_w = \frac{t^3}{144} (B^3 + 4d^3)$
	$J = (2Be^3 + dt^3)/3$ $C_w = d^2 I_y / 4$	Si $t = e$ $J = t^3 (2B + d)/3$
	$x_o = \frac{2a(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$ $J = \frac{2a \alpha t^3}{3}$ $C_w = \frac{2ta^5}{3} \left[\alpha^3 - \frac{6(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^2}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right]$	Si $2\alpha = \pi$ $x_o = \frac{4a}{\pi}$ $J = \frac{\pi a t^3}{3}$ $C_w = \frac{2ta^5}{3} \left(\frac{\pi^3 - 12}{8} \frac{1}{\pi} \right) = 0.0374ta^5$



Pandeo torsional y flexotorsional - Secciones NO COMPACTAS

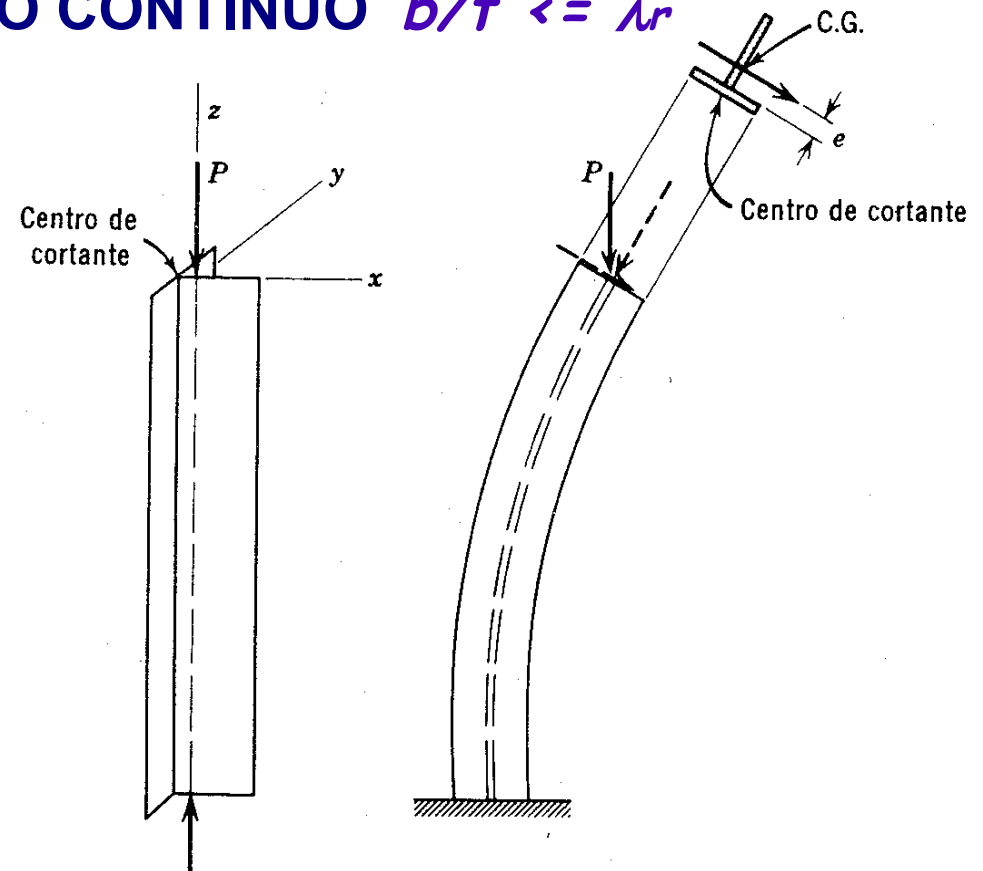
SECCIONES "T" Y DOBLE ANGULO CONTINUO $b/t \leq \lambda_r$

$$P_d = \phi_c \cdot P_n$$

$$P_n = A_g \cdot F_{crft}$$

$$\phi_c = 0,85$$

$$F_{crft} = \left(\frac{F_{cry} + F_{crz}}{2H} \right) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4F_{cry} F_{crz} H}{(F_{cry} + F_{crz})^2}} \right], \text{ en MPa} \quad (E-3.1)$$



Pandeo torsional y flexotorsional - Secciones NO COMPACTAS

SECCIONES "T" Y DOBLE ANGULO CONTINUO $b/t \leq \lambda_r$

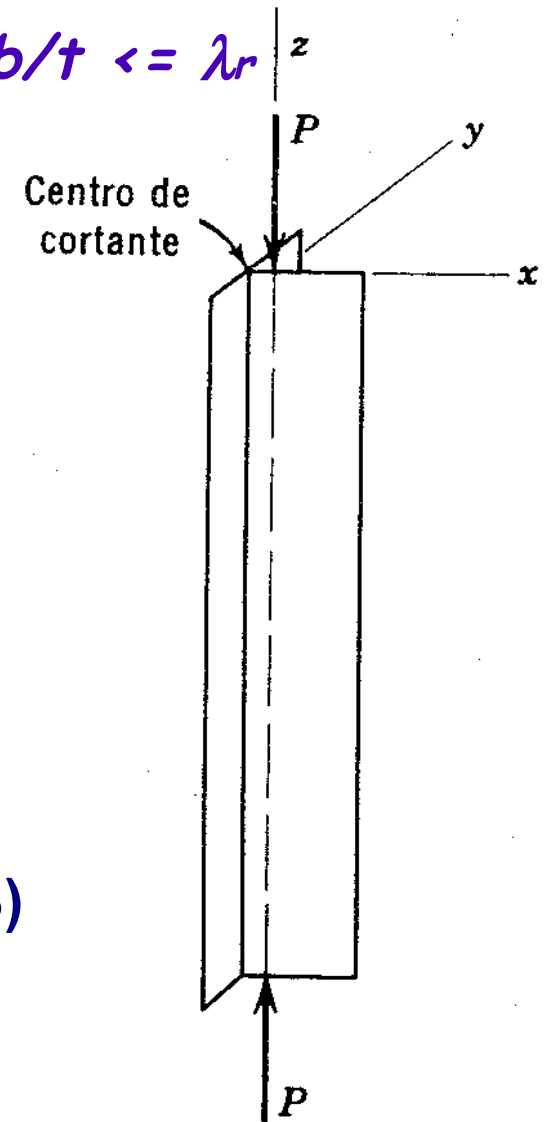
$$F_{crft} = \left(\frac{F_{cry} + F_{crz}}{2H} \right) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4F_{cry} F_{crz} H}{(F_{cry} + F_{crz})^2}} \right]$$

$$F_{crz} = \frac{G J}{A \bar{r}_o^2}$$

$\bar{r}_o$ el radio de giro polar respecto al centro de corte,

$$H = 1 - \left(\frac{y_o^2}{\bar{r}_o^2} \right) \quad \bar{r}_o^2 = x_o^2 + y_o^2 + \frac{(I_x + I_y)}{A} \quad (\text{A-E.3.8})$$

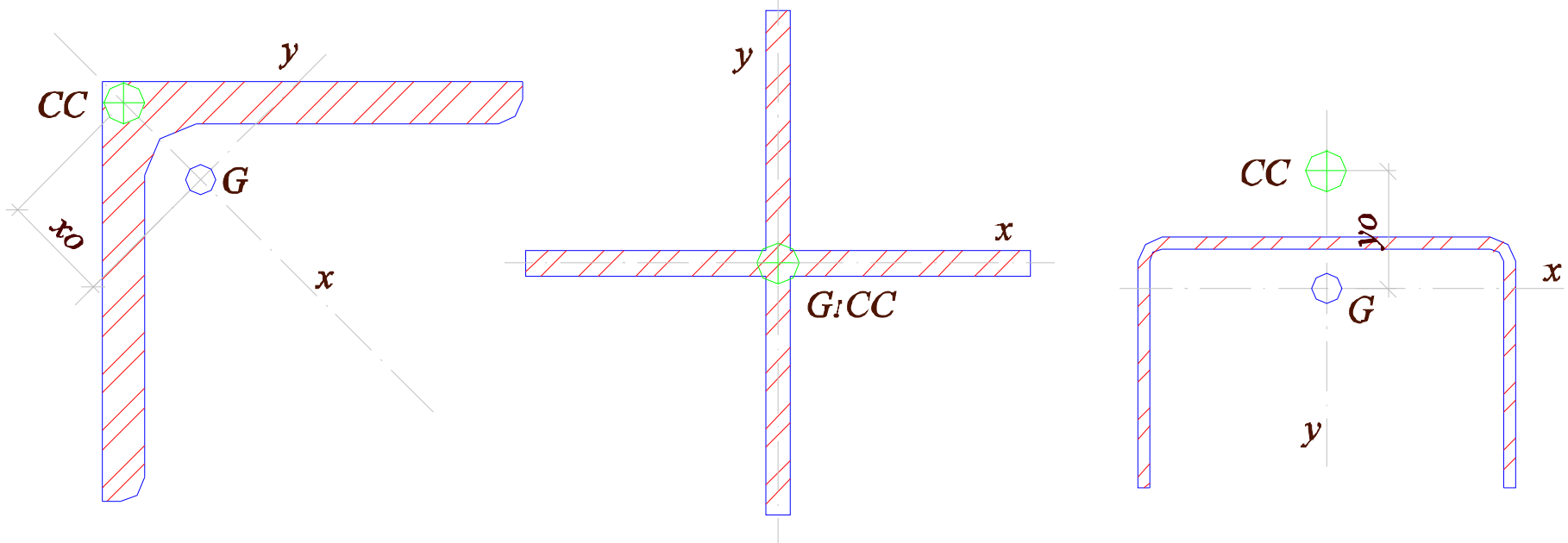
y_o la distancia entre el centro de corte y el centro de



Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

SECCIONES "T" Y DOBLE ANGULO CONTINUO **ESBELTAS**

SECCIONES DE DOBLE SIMETRÍA, DE SIMPLE SIMETRÍA Y ASIMÉTRICAS



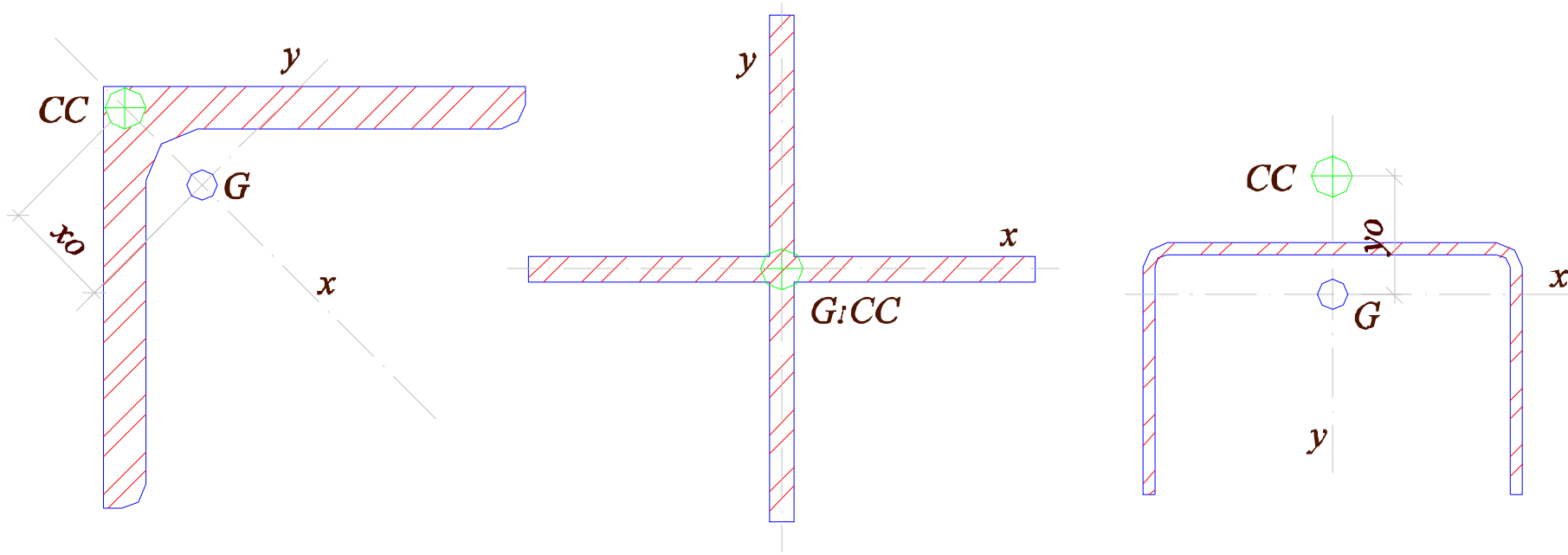
Se aplica

A-E.3. Resistencia de diseño a compresión para pandeo torsional y pandeo flexotorsional

Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

A-E.3.

Las barras comprimidas con secciones abiertas de pared delgada, las secciones asimétricas, las secciones de un solo eje de simetría (ángulos, canales, doble ángulo, tes), las secciones en cruz, o en general las secciones con poca rigidez torsional y/o pequeño C_w , pueden tener una resistencia de diseño a pandeo torsional o flexotorsional menor que la correspondiente a pandeo flexional, por lo que deberán ser verificadas mediante la aplicación de este artículo.



Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

A-E.3.

$$P_d = \phi_c \cdot P_n$$

$$P_n = A_g \cdot F_{cr} \quad (\text{A-E.3.1.})$$

$$\phi_c = 0,85$$

(a) Para $\lambda_e \sqrt{Q} \leq 1,5$

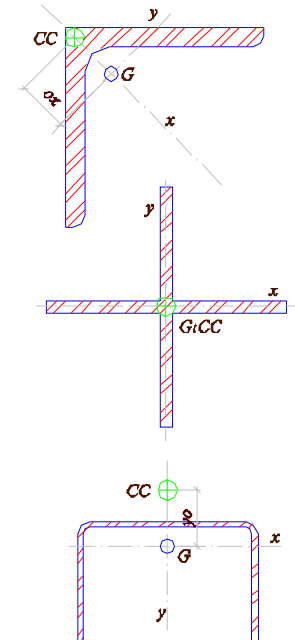
$$F_{cr} = Q \left(0,658^{Q \cdot \lambda_e^2} \right) F_y \quad (\text{A-E.3.2})$$

(b) Para $\lambda_e \sqrt{Q} > 1,5$

$$F_{cr} = \left(\frac{0,877}{\lambda_e^2} \right) F_y \quad (\text{A-E.3.3})$$

con

$$\lambda_e = \sqrt{\frac{F_y}{F_e}} \quad (\text{A-E.3.4})$$



Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

F_e Tensión crítica **elástica** de pandeo T o FT

a) Para secciones doblemente simétricas

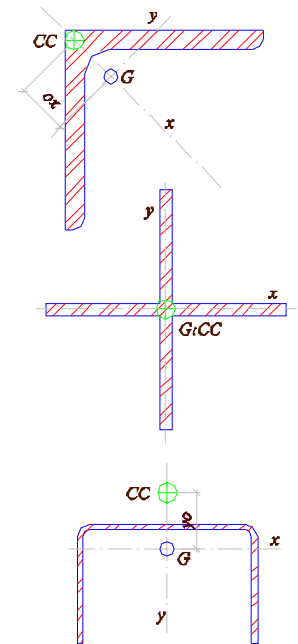
$$F_e = \left[\frac{\pi^2 E C_w}{(k_z L)^2} + G J \right] \frac{1}{I_x + I_y} \quad (\text{A-E.3.5})$$

b) Para secciones de simple simetría donde el eje “ y ” es el de simetría:

$$F_e = \frac{F_{ey} + F_{ez}}{2H} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 F_{ey} F_{ez} H}{(F_{ey} + F_{ez})^2}} \right] \quad (\text{A-E.3.6})$$

c) Para secciones asimétricas, la tensión crítica elástica para pandeo flexo-torsional F_e es la menor de las raíces de la siguiente ecuación cúbica:

$$(F_e - F_{ex})(F_e - F_{ey})(F_e - F_{ez}) - F_e^2 (F_e - F_{ey}) \left(\frac{x_0}{r_o} \right)^2 - F_e^2 (F_e - F_{ex}) \left(\frac{y_0}{r_o} \right)^2 = 0 \quad (\text{A-E.3.7})$$



Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

Fe Tensión crítica **elástica** de pandeo *T* o *FT*

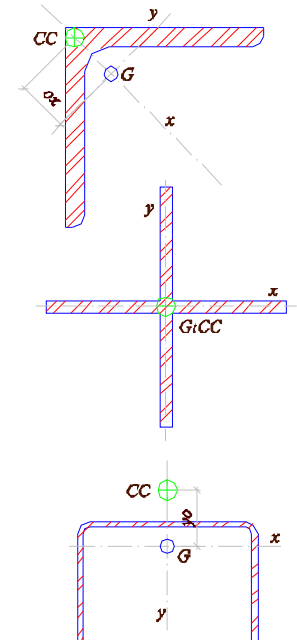
$$\overline{r_o}^2 = x_o^2 + y_o^2 + \frac{(I_x + I_y)}{A} \quad (\text{A-E.3.8})$$

$$H = 1 - \left(\frac{x_o^2 + y_o^2}{\overline{r_o}^2} \right) \quad (\text{A-E.3.9})$$

$$F_{ex} = \frac{\pi^2 E}{\left(k_x \frac{L}{r_x} \right)^2} \quad (\text{A-E.3.10})$$

$$F_{ey} = \frac{\pi^2 E}{\left(k_y \frac{L}{r_y} \right)^2} \quad (\text{A-E.3.11})$$

$$F_{ez} = \left[\frac{\pi^2 E C_w}{(k_z L)^2} + G J \right] \frac{1}{A \overline{r_o}^2} \quad (\text{A-E.3.12})$$



Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

Consideremos un ejemplo:

Se requiere la CAPACIDAD de una barra de 2400 mm de longitud, apoyada en sus extremos, articulados a flexión y torsión. La fuerza de compresión es baricéntrica.

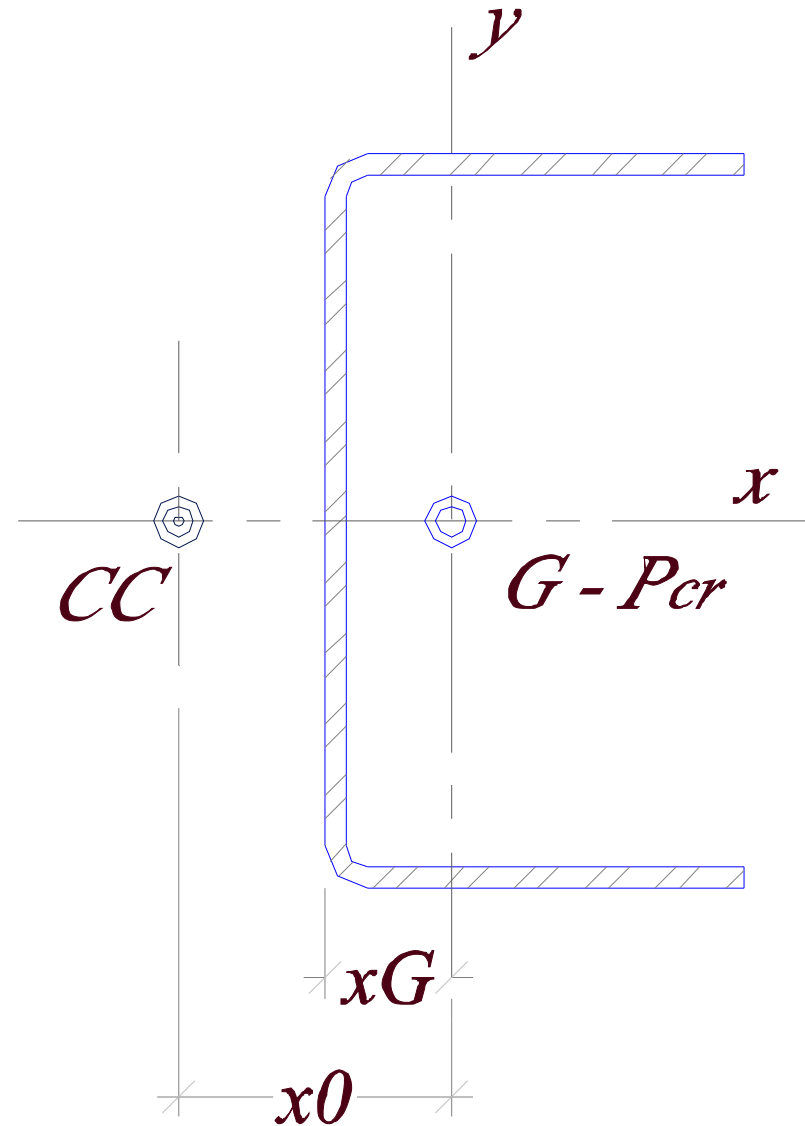
La sección es

U70.40.2, acero F24

$F_y = 240 \text{ Mpa}$ $F_u = 370 \text{ Mpa}$

$E = 202000 \text{ Mpa}$

$G = 78000 \text{ MPa}$



Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

➔ *Características de la sección:*

$$A_g = 284 \text{ mm}^2$$

$$I_x = 224\,000 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 46\,600 \text{ mm}^4$$

$$r_x = 28,1 \text{ mm}$$

$$r_y = 12,8 \text{ mm}$$

$$J = 430 \text{ mm}^4$$

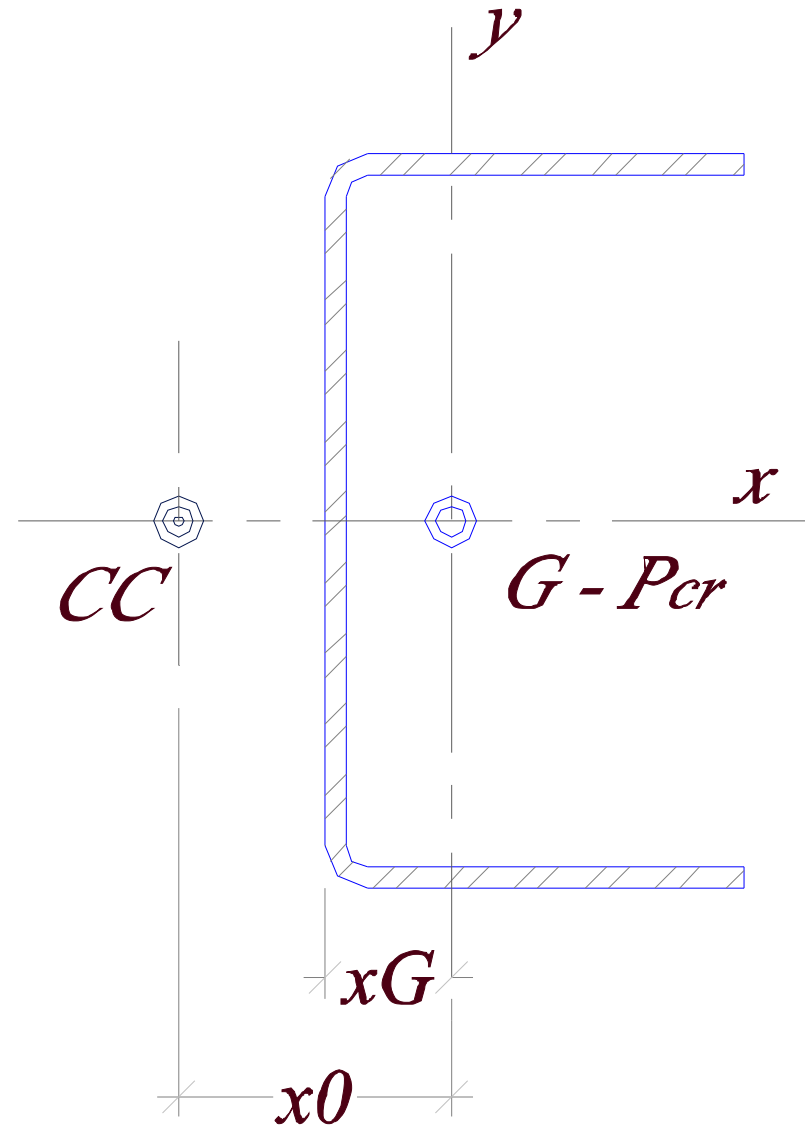
$$C_w = 36,2 \text{ E6 mm}^6$$

$$x_G = 11,7 \text{ mm} \quad y_G = 0$$

$$x_0 = 25,8 \text{ mm} \quad y_0 = 0$$

$$r_z^2 = (I_x + I_y)/A_g = 953 \text{ mm}^2$$

$$r_z = 30,9 \text{ mm}$$



Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

.... Características de la sección:

$$\bar{r}_0^2 = r_z^2 + x_0^2 + y_0^2 = 1618 \quad (\text{A-E.3.8})$$

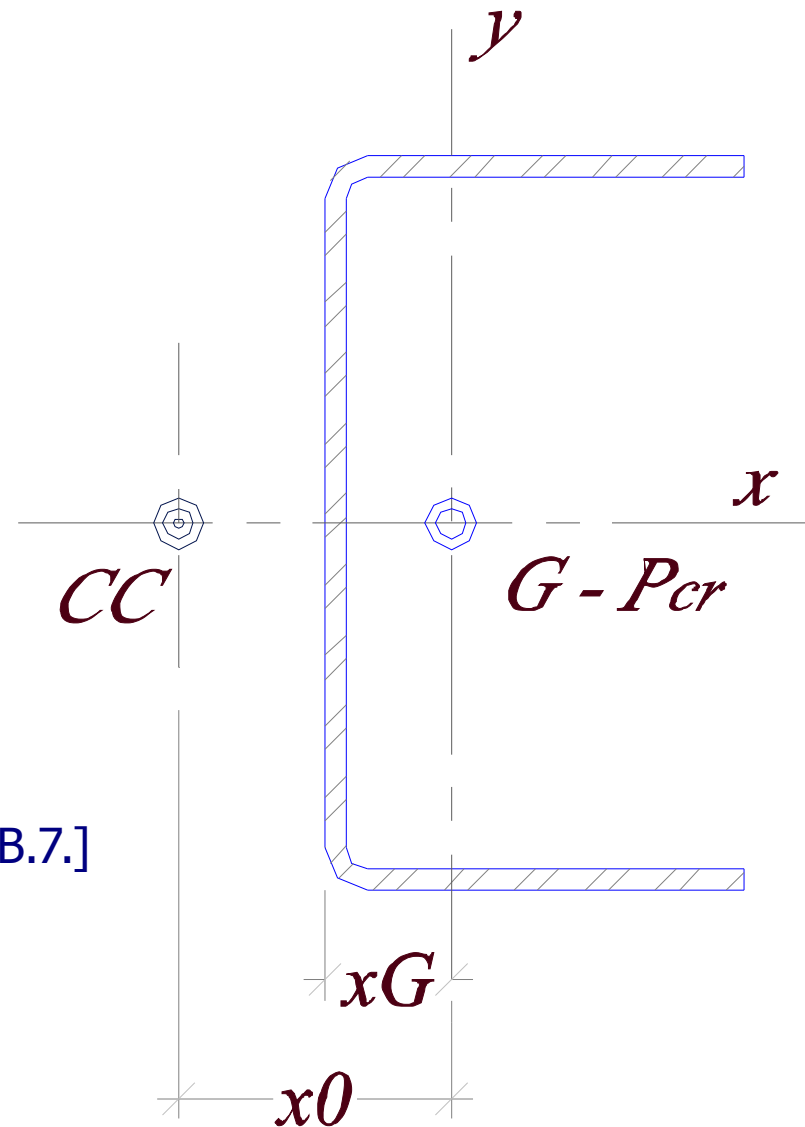
$$\bar{r}_0 = 40,23 \text{ mm}$$

$$H = 1 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{\bar{r}_0^2} = 0,589 \quad (\text{A-E.3.9})$$

➔ Control de la esbeltez $kL/r \leq 200$ [B.7.]

$$L_x = L_y = 2\,400 \text{ mm}$$

$$k.L_y / r_y = 1 \times 2400 / 12,8 = 188 \text{ OK}$$



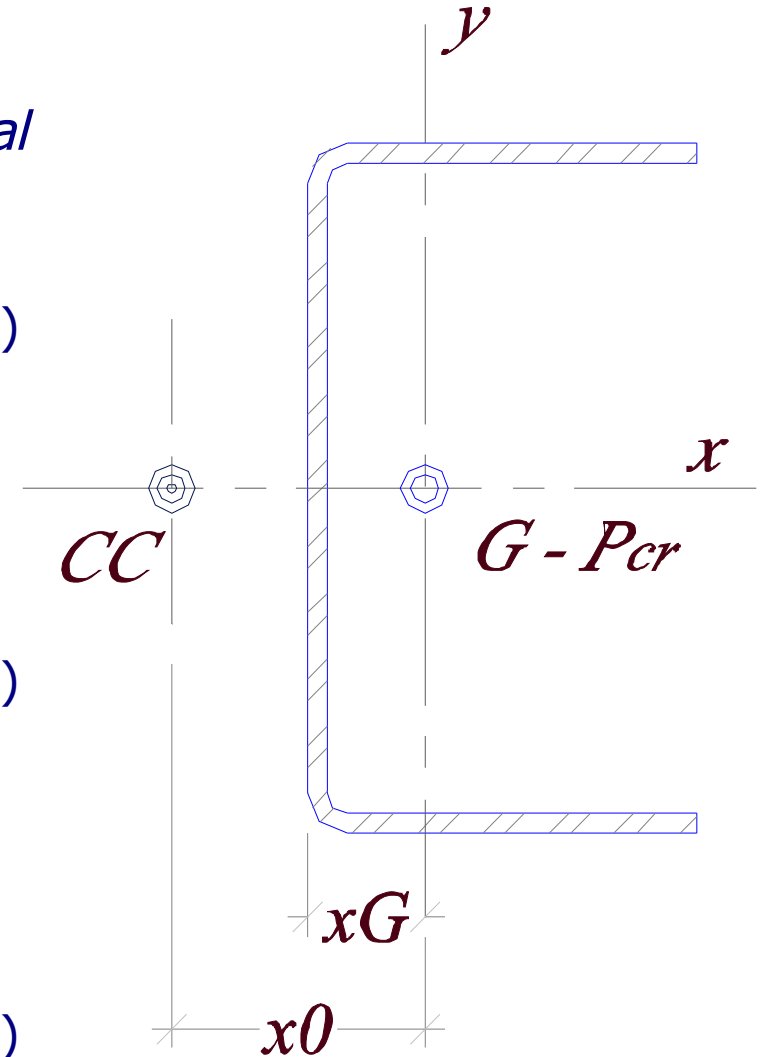
Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

→ *Tensiones críticas de pandeo flexional y torsional*

$$F_{ex} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{k_x L_x}{r_x} \right)^2} = 273,3 \text{ MPa} \quad (\text{A-E.3.10})$$

$$F_{ey} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{k_y L_y}{r_y} \right)^2} = 56,7 \text{ MPa} \quad (\text{A-E.3.11})$$

$$F_{ez} = \frac{1}{A_g \bar{r}_0^2} \left[\frac{\pi^2 \cdot E}{\left(k_z L_z \right)^2} + G \cdot J \right] = 100,3 \text{ MPa} \quad (\text{A-E.3.12})$$

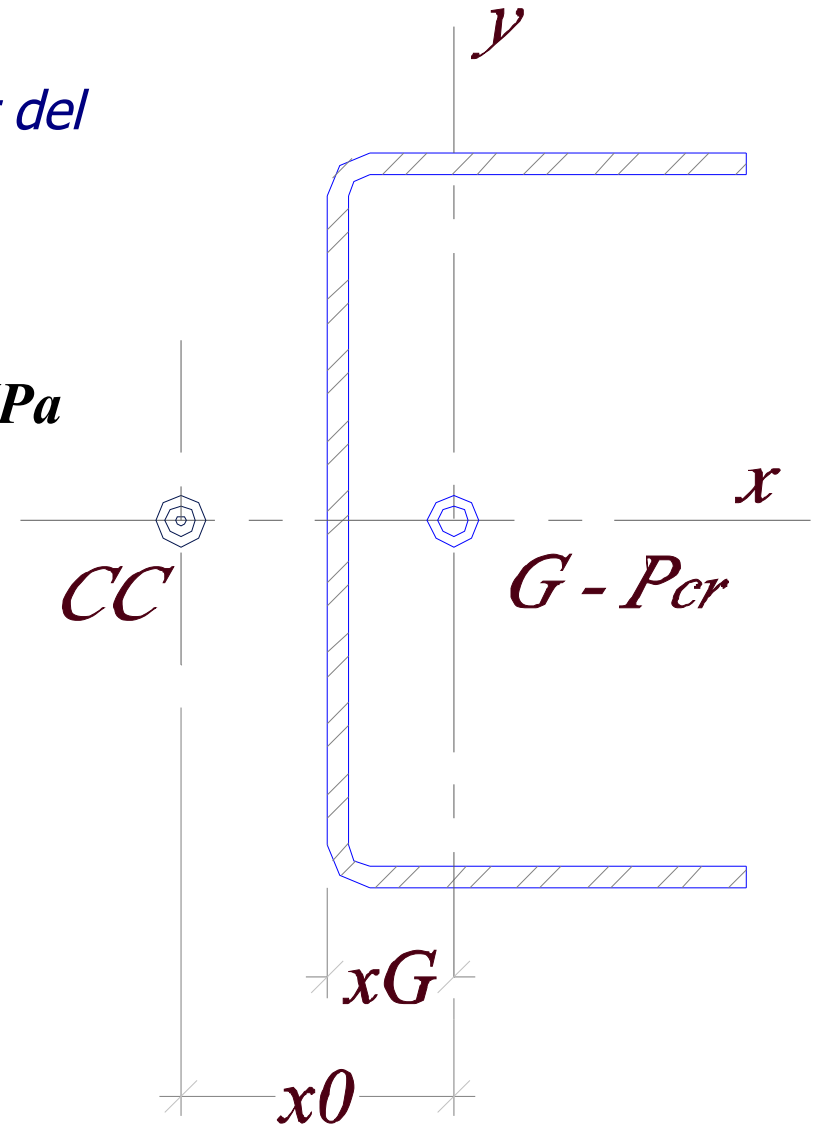


Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

➔ *Tensión crítica de pandeo flexo-torsional, atendiendo que la flexión se dará alrededor del eje y-y*

$$F_e = \frac{F_{ey} + F_{ez}}{2H} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 F_{ey} \cdot F_{ez} \cdot H}{(F_{ey} + F_{ez})^2}} \right] = 43,2 \text{ MPa}$$

(A-E.3.6)



Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

➔ Consideración del pandeo local

- Elemento **A** – placa Rigidizada
Caso 10 – Tabla B.5-1

$$\lambda_r = 1,4 \sqrt{\frac{E}{F_Y}} = 40,6$$

$$b_w = h - 2 \cdot (t + r) = 62 \text{ mm}$$

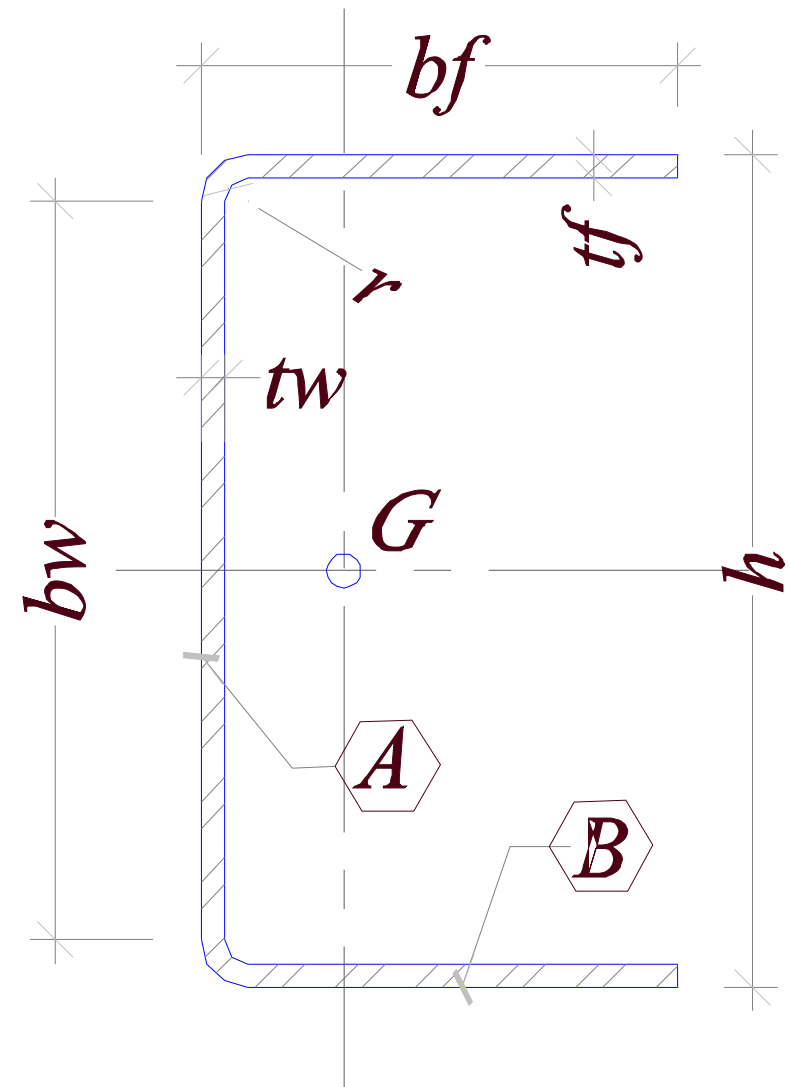
$$b_w/t_w = 62/2 = 31 \gg \text{NO compacta} \\ \gg Q_a = 1$$

- Elemento **B** – placa NO Rigidizada
Caso 4 – Tabla B.5-1

$$\lambda_r = 0,56 \sqrt{\frac{E}{F_Y}} = 16,2$$

$$b_f = b = 40 \text{ mm}$$

$$b_f/t_f = 40/2 = 20 \gg \gg \text{ESBELTA} \gg \gg Q_s$$



Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

➔ Consideración del pandeo local

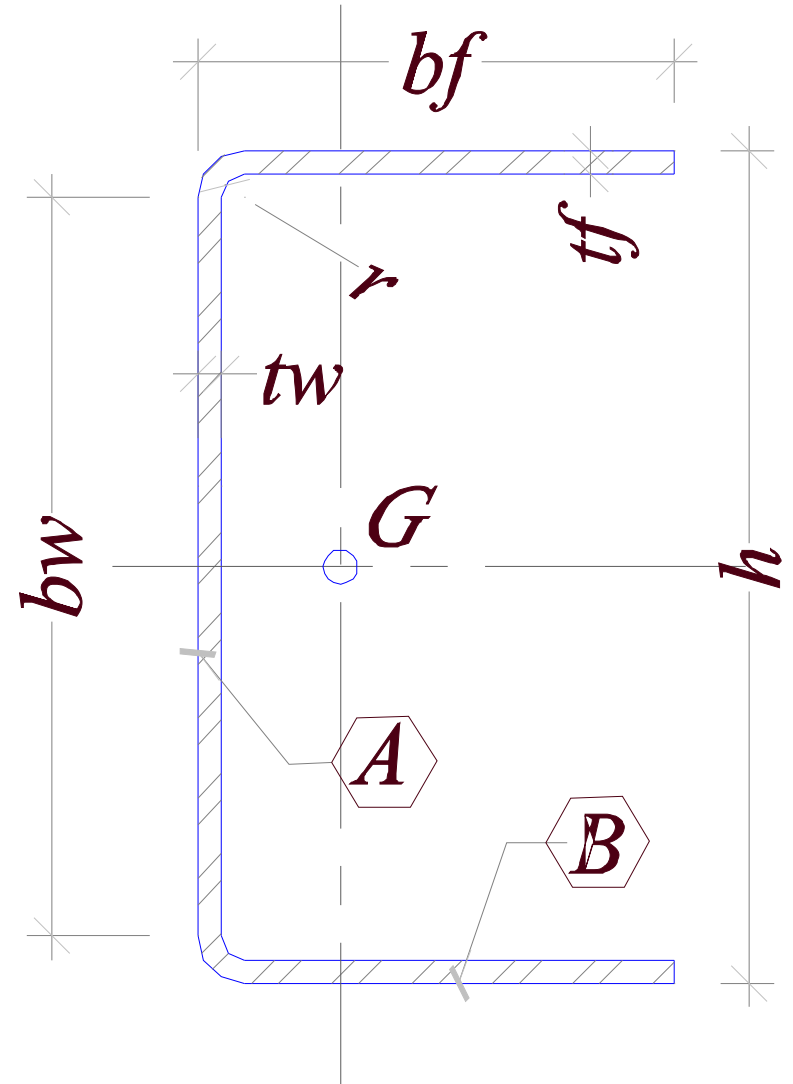
➤ SECCIÓN ESBELTA debido al elemento **B**

Q_s según A-B.5.3.a.(b)

$$\lambda_r < \frac{b_f}{t_f} \leq 1,03 \sqrt{\frac{E}{F_Y}} \quad (: 29,9)$$

$$Q_s = 1,415 - 0,74 \cdot \frac{b_f}{t_f} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = 0,905$$

$$Q = Q_a \cdot Q_s = 1 \cdot 0,905 = 0,905$$



Pandeo torsional y flexotorsional – Secciones ESBELTAS

➔ *Tensión crítica y Capacidad de proyecto*

➤ *Parámetro de esbeltez elástico*

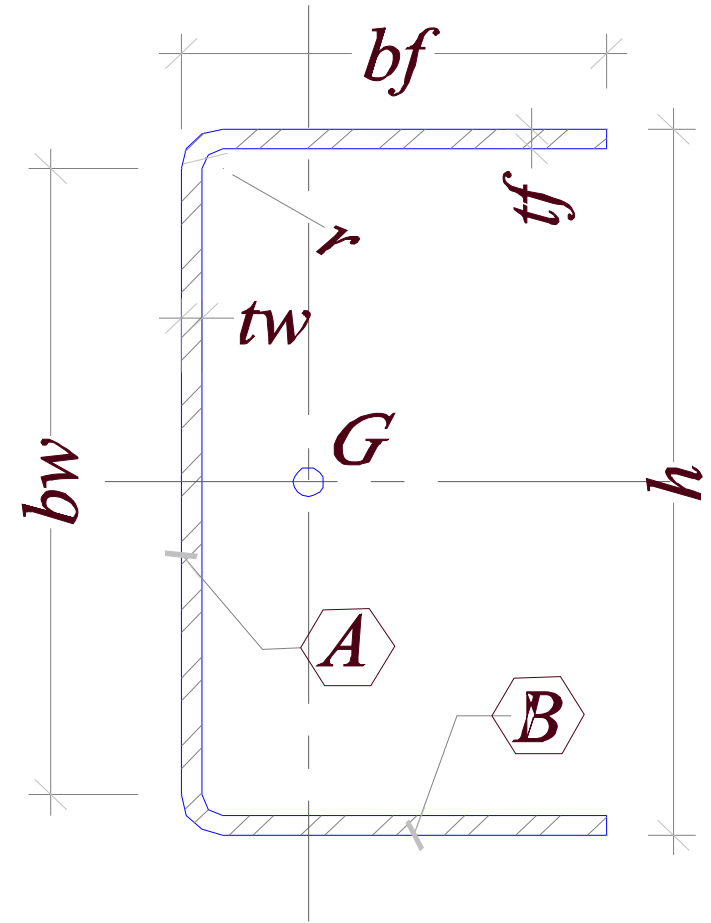
$$\lambda_e = \sqrt{\frac{F_y}{F_e}} = \sqrt{\frac{240}{43,2}} = 2,357 \quad (\text{A-E.3.4})$$

$$\lambda_e \sqrt{Q} = 2,357 \sqrt{0,905} = 2,24 > 1,5$$

$$F_{cr} = \frac{0,877}{\lambda_e^2} \cdot F_y = \frac{0,877}{2,357^2} \cdot 240 = 37,89 \text{ MPa} \quad (\text{A-E.3.3})$$

$$P_n = A_g \cdot F_{cr} = 284 \cdot 37,89 = 10760 \text{ N} \quad (\text{A-E.3.1})$$

$$P_d = \phi \cdot P_n = 0,85 \cdot 10760 = 9146 \text{ N} = 9,1 \text{ kN}$$



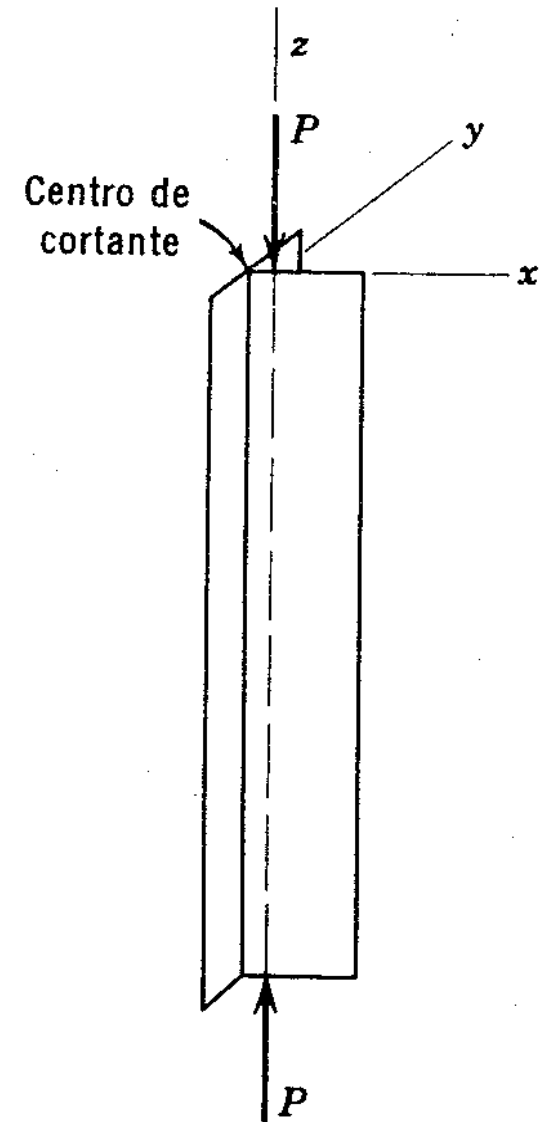
Pandeo torsional y flexotorsional

Parámetros que intervienen en la capacidad de la barra

- **Material E, G**
- **Condiciones de vinculación**
- **Longitud de la pieza - $k.L$**
- **Inercia flexional: I_x, I_y**
- **Módulo de torsión J**
- **Módulo de alabeo C_w**
- **Ubicación del C.C.**

El modo de pandeo (por flexión pura, por torsión pura o por flexotorsión) depende de:

- ◆ *Simetría de la sección*
- ◆ *Localización del Centro de Cortante*
- ◆ *Excentricidad de la carga*



Pandeo torsional y flexotorsional

- CIRSOC 301-EL explicita la determinación de las tensiones críticas y considera la esbeltez de la sección*

a) Para secciones doblemente simétricas

$$F_e = \left[\frac{\pi^2 E C_w}{(k_z L)^2} + G J \right] \frac{1}{I_x + I_y} \quad (\text{A-E.3.5})$$

b) Para secciones de simple simetría donde el eje “y” es el de simetría:

$$F_e = \frac{F_{ey} + F_{ez}}{2H} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 F_{ey} F_{ez} H}{(F_{ey} + F_{ez})^2}} \right] \quad (\text{A-E.3.6})$$

c) Para secciones asimétricas, la tensión crítica elástica para pandeo flexo-torsional F_e es la menor de las raíces de la siguiente ecuación cúbica:

$$(F_e - F_{ex})(F_e - F_{ey})(F_e - F_{ez}) - F_e^2 (F_e - F_{ey}) \left(\frac{x_0}{r_o} \right)^2 - F_e^2 (F_e - F_{ex}) \left(\frac{y_0}{r_o} \right)^2 = 0 \quad (\text{A-E.3.7})$$